応用数学 補足資料

2001 年 6 月 25 日

フーリエ変換の性質

上智大学 講師

宮武 昌史

フーリエ変換の公式

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

フーリエ逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

フーリエ変換の性質

(1) 線形性

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightleftharpoons a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 f_1(t)e^{-i\omega t} + a_2 f_2(t)e^{-i\omega t}\}dt \\
&= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)
\end{aligned}$$

(2) 対称性

$$F(t) \rightleftharpoons 2\pi f(-\omega)$$

フーリエ逆変換の公式で，　$t = -t'$ とおくと，

$$f(-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t'}d\omega$$

$t' \to \omega, \omega \to t$ と書き換えると，

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt = F(t)$$

よって，

$$2\pi f(-\omega) \rightleftharpoons F(t)$$

(3) 時間軸の伸縮

$$f(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

1. $a > 0$ のとき

$x = at$ とおいてフーリエ変換を実行

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega\frac{x}{a}}\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}dx = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$$

2. $a < 0$ のとき

$x = at = -|a|t$ とおいてフーリエ変換を実行

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(x)e^{-i\omega\frac{x}{a}}\frac{-dx}{|a|} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}dx = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

(4) 時間軸と周波数軸の推移

$$f(t-t_0) \rightleftharpoons F(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

$$f(t)e^{i\omega_0 t} \rightleftharpoons F(\omega-\omega_0)$$

$x = t - t_0$ とおいてフーリエ変換を実行

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x+t_0)}dx = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

同様に,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dx = F(\omega-\omega_0)$$

(5) 微分

$$\frac{d}{dt}f(t) \rightleftharpoons i\omega F(\omega)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t) &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left\{\frac{d}{dt}e^{i\omega t}\right\}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)i\omega e^{i\omega t}d\omega \\ &\rightleftharpoons i\omega F(\omega)\end{aligned}$$

(6) 積分

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \rightleftharpoons \frac{F(\omega)}{i\omega}$$

$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ とおくと，$\frac{d}{dt}g(t)=f(t)$
$g(t), \frac{d}{dt}g(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $G(\omega), F(\omega)$ とすると，

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dg(t)}{dt}e^{-i\omega t}dt=i\omega G(\omega)$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \rightleftharpoons \frac{F(\omega)}{i\omega}$$

(7) パーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+t')f^*(t')dt'$ とおくと，$g(t)$ のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t+t')f^*(t')dt'\right\}e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t')e^{i\omega t'}dt'\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t+t')e^{-i\omega(t+t')}dt \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'}dt'\right\}^*\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t+t')e^{-i\omega(t+t')}dt \\
&= F^*(\omega)F(\omega)
\end{aligned}$$

$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ より，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+t')f^*(t')dt'=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2e^{i\omega t}d\omega$$

ここで $t=0$ とおき，改めて $t'\to t$ とすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

(8) たたみ込み積分 (convolution)

$$\begin{aligned}
f_1(t)f_2(t) \quad &\rightleftharpoons \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega')F_2(\omega-\omega')d\omega' \\
F_1(\omega)F_2(\omega) \quad &\rightleftharpoons \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t')f_2(t-t')dt'
\end{aligned}$$

上側の式で，右辺のフーリエ逆変換 $f(t)$ が左辺と等しくなることを証明

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega') F_2(\omega - \omega') d\omega' \right\} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega - \omega') e^{i\omega t} d\omega \right\} d\omega'
\end{aligned}
$$

{　} 内に周波数軸推移の公式を用いると，

$$
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega - \omega') e^{i\omega t} d\omega = f_2(t) e^{i\omega' t}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega') f_2(t) e^{i\omega' t} d\omega' \\
&= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \right\} f_2(t) \\
&= f_1(t) f_2(t)
\end{aligned}
$$

(8) たたみ込み積分の所で，誤植が発見されましたので，修正しました。(2009.4.10 加筆)

miyatake@sophia.ac.jp

http://miyatake.main.jp